从 PPA, ADMM 到广义 PPA 算法

线性约束的凸优化问题的拉格朗日函数的鞍点, 跟结构型单调变分不等式

$$w^* \in \Omega, \quad \theta(u) - \theta(u^*) + (w - w^*)^T F(w^*) \geq 0, \quad \forall\, w \in \Omega$$

的解集是等价的。变量为 w 的经典的邻近点算法 (PPA), 其迭代序列 $\{w^k\}$ 具有

$$\|w^{k+1} - w^*\|_H^2 \leq \|w^k - w^*\|_H^2 - \|w^k - w^{k+1}\|_H^2$$

和

$$\|w^{k+1} - w^{k+2}\|_H^2 \leq \|w^k - w^{k+1}\|_H^2$$

这样非常漂亮的性质, 其中 H 为确定的正定矩阵。

求解两个可分离块的线性约束凸优化问题, 乘子交替方向法 (ADMM) 已经是耳熟能详的方法。ADMM 的每次迭代从给定的 $v^k = (y^k, \lambda^k)$ 开始, 给出新的 $v^{k+1} = (y^{k+1}, \lambda^{k+1})$。ADMM 的核心变量的迭代序列 $\{v^k\}$ 同样具有

$$\|v^{k+1} - v^*\|_H^2 \leq \|v^k - v^*\|_H^2 - \|v^k - v^{k+1}\|_H^2$$

和

$$\|v^{k+1} - v^{k+2}\|_H^2 \leq \|v^k - v^{k+1}\|_H^2$$

这样的性质, 这些性质是 ADMM 被广泛采用的机理, 也为一些加速 ADMM 方法提供了某种支撑。

对一般的凸优化问题所对应的变分不等式, 我们通过 Gauss 型预测-校正, 构造了相应的容易实现的广义邻近点算法 (Generalized PPA), 其迭代产生的序列同样具有上面所述的漂亮性质, 为拓展凸优化算法设计提供了新的思路。